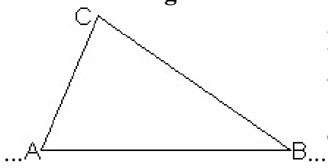
Allgemeines Dreieck

Inhalt dieser Webseite

Zur Hauptseite "Mathematische Basteleien"

Was ist das allgemeine Dreieck?

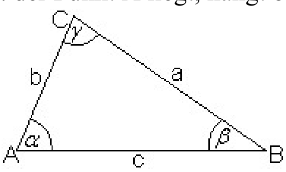


Das allgemeine Dreieck entsteht, wenn man drei beliebige, nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B und C durch Strecken verbindet.
"Allgemein" soll heißen, dass das Dreieck keine besonderen Eigenschaften hat und dass sich somit die Aussagen auf beliebige Dreiecke beziehen.

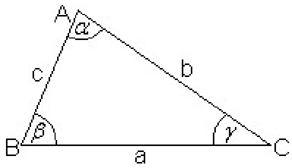
Ich beschränke mich auf dieser Seite auf spitzwinklige Dreiecke.
Die Aussagen lassen sich auch auf stumpfwinklige Dreiecke, also Dreiecke mit einem stumpfen Innenwinkel, übertragen. Die Zeichnungen und Beweise müssten dann angepasst werden. Das will ich mir ersparen.

Bezeichnungen top

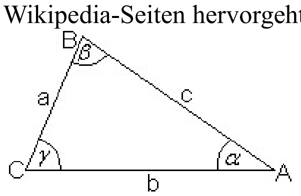
Man bezeichnet üblicherweise aus praktischen Gründen die Eckpunkte eines Dreiecks mit A, B und C, die Seiten mit a, b und c und die Innenwinkel mit alpha, beta und gamma.
> Zu Punkt A gehört der Winkel alpha.
> Die Seite a liegt dem Punkt A gegenüber.
> Die Punkte A, B und C sind entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn angeordnet.
> Die Seite c liegt horizontal.
Wo z. B. der Punkt A liegt, hängt offenbar vom Kulturbereich ab, wie aus den entsprechenden Wikipedia-Seiten hervorgeht.



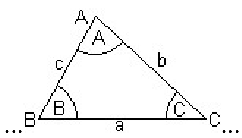
deutsch



französisch



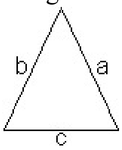
italienisch



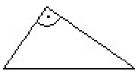
Im englischsprachigen Bereich werden auch die Winkel manchmal mit A, B und C bezeichnet (2).

Besondere Dreiecke top

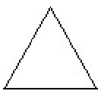
Die folgenden sechs Dreiecke haben besondere Eigenschaften, die in den Namen zum Ausdruck kommen.



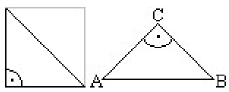
1



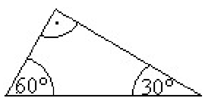
2



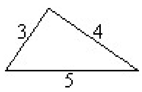
3



4



5

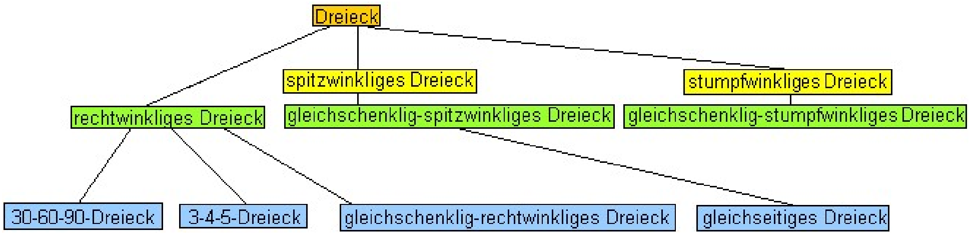


6

---

1 Gleichschenkliges Dreieck
2 Rechtwinkliges Dreieck
3 Gleichseitiges Dreieck
4 Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck
5 30-60-90-Dreieck
6 3-4-5-Dreieck

Übersicht

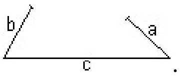


Formeln zum Dreieck top

Dreiecksungleichungen

Für ein Dreieck gilt **a+b>c**, **a+c>b** und **b+c>a**.

...



a+b<c

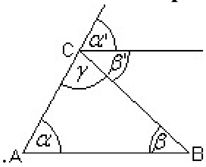
...

Die Ungleichungen besagen, dass im Dreieck die Summe der Längen zweier Seiten stets größer ist als die Länge der dritten Seite.

Durch diese Bedingungen wird sichergestellt, dass ein Dreieck aus drei Seiten überhaupt entstehen kann.

Satz von der Winkelsumme im Dreieck

Der Satz lautet **alpha+beta+gamma=180°**.

...

$$\left.\begin{array}{l}\gamma+\beta'+\alpha'=180^\circ\\ \beta=\beta'\\ \alpha=\alpha'\end{array}\right\}\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$

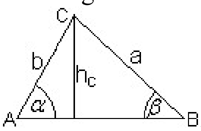
...

Der Beweis geht aus der Skizze hervor.
Die Formel folgt aus den Aussagen
>Der gestreckte Winkel hat das Winkelmaß 180°.
>Wechselwinkel an Parallelen sind gleich.
>Stufenwinkel an Parallelen sind gleich.

Sinussatz

Er lautet a:b=sin(alpha):sin(beta), a:c=sin(alpha):sin(gamma) und b:c=sin(beta):sin(gamma).

Herleitung

...

...

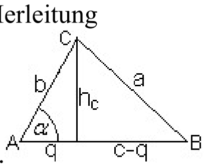
Aus h_c=a*sin(beta)und h_c=b*sin(alpha) folgt a*sin(beta)=b*sin(alpha) oder a**:**b=sin(alpha)**:**sin(beta).
Zeichnet man h_b ein, so gelangt man entsprechend zu a:c=sin(alpha):sin(gamma).
Die Höhe h_a führt zu b**:**c=sin(beta)**:**sin(gamma).

Die drei Formeln fasst man zu **a:b:c=sin(alpha):sin(beta):sin(gamma)** zusammen.

Kosinussatz

Er lautet **a²=b²+c²-2bc*cos(alpha)**, **b²=a²+c²-2ac*cos(beta)** und **c²=a²+b²-2ab*cos(gamma)**.

Herleitung

...

...

Es gelten die Formeln a²=(c-q)²+h_c², q=b*cos(alpha) und h_c=b*sin(alpha) und.
Das bedeutet a²=(c-q)²+h_c²=c²-2cq+q²+h_c²
=c²-2cb*cos(alpha)+b²*cos²(alpha)+b²*sin²(alpha)=b²+c²-2cb*cos(alpha).

Die Formeln b²=a²+c²-2ac*cos(beta) und c²=a²+b²-2ab*cos(gamma) erhält man, wenn man die anderen Höhen betrachtet.

Aus dem Sinus- und dem Kosinussatz gehen drei weitere Formeln hervor.

Mollweidesche Formeln

$$(b+c)\sin(\frac{\alpha}{2})=a\cos(\frac{\beta-\gamma}{2})\qquad(c+a)\sin(\frac{\beta}{2})=b\cos(\frac{\gamma-\alpha}{2})\qquad(a+b)\sin(\frac{\gamma}{2})=c\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$(b-c)\cos(\frac{\alpha}{2})=a\sin(\frac{\beta-\gamma}{2})\qquad(c-a)\cos(\frac{\beta}{2})=b\sin(\frac{\gamma-\alpha}{2})\qquad(a-b)\cos(\frac{\gamma}{2})=c\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

...

Tangenssatz

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\tan(\frac{\alpha-\beta}{2})}\qquad\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan(\frac{\beta+\gamma}{2})}{\tan(\frac{\beta-\gamma}{2})}\qquad\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan(\frac{\gamma+\alpha}{2})}{\tan(\frac{\gamma-\alpha}{2})}$$

...

Halbwinkelsatz

$$\tan(\frac{\alpha}{2})=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\qquad\tan(\frac{\beta}{2})=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\qquad\tan(\frac{\gamma}{2})=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

mit 2s=a+b+c

...

Da in den Formeln die halben Winkel auftauchen, sind sie für praktische Dreiecksberechnungen von Dreiecken mit kleinen Winkeln und Winkeln nahe an 90° geeignet (1).
Einen Beweis der drei Sätze findet man bei Thomas Steinfeld (Wurzelzieher Mathepedia) (URL unten).

Grundaufgaben top

Übersicht

Will man ein Dreieck festlegen, genügt es, von den sechs Stücken a, b, c, alpha, beta und gamma nur drei Stücke zu kennen. Die übrigen findet man durch Rechnung (oder Zeichnung).

Es gibt 20 Möglichkeiten, drei von sechs Stücken herauszugreifen. Diese Anzahl wird mit Hilfe des Binomialkoeffizienten C(n,k) bestimmt. Es gilt C(n.k)=n!/[k!(n-k)!] und hier speziell C(6,3)=6!/[3!(6-3)!]=(4*5*6)/(2*3)=20.

Und das sind die 20 Möglichkeiten.

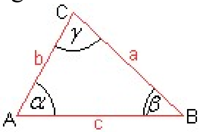
a-b-c, a-b-alpha, a-b-beta, a-b-gamma, a-c-alpha, a-c-beta, a-c-gamma, a-alpha-beta, a-alpha-gamma, a-beta-gamma	b-c-alpha, b-c-beta, b-c-gamma, b-c-beta, b-c-gamma b-beta-gamma	c-alpha,-beta, c-alpha-gamma, c-beta-gamma	alpha-beta-gamma

Ordnet man die Tripel nach der Lage der Seiten und Winkel zueinander, so gelangt man zwangsläufig zu den vier Grundaufgaben SSS, WSW, SWS und S_gSW. Bei ihnen werden durch drei gegebene Größen die übrigen eindeutig bestimmt, wie die folgenden Überlegungen zeigen.

---

1. Grundaufgabe SSS

Gegeben sind die drei Seiten.

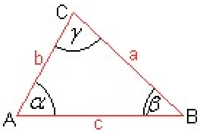
...

Ein Fall

a-b-c

Zur Lösung

Gegeben sind a, b und c, gesucht sind alpha, beta und gamma.

...

Es gelten die drei Formeln des Kosinussatzes.

a²=b²+c²-2bc*cos(alpha)

b²=a²+c²-2ac*cos(beta)

c²=a²+b²-2ab*cos(gamma)

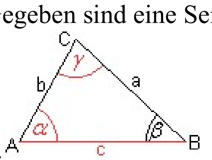
Aus ihnen berechnet man die Winkel.

Es muss die Dreiecksungleichung erfüllt werden, damit es überhaupt ein Dreieck gibt.

---

2. Grundaufgabe WSW

Gegeben sind eine Seite und zwei Winkel.

...

9 Fälle

alpha-c-beta, beta-a-gamma, gamma-b-alpha,

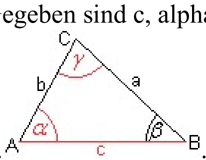
c-beta-gamma, a-gamma-alpha, b-alpha-beta,

c-alpha-gamma, b-gamma-beta, a-beta-alpha

Der Fall WWS muss nicht gesondert aufgeführt werden, weil man immer den Winkel zwischen den Seiten aus den gegebenen nach der Winkelsumme im Dreieck berechnen kann.

Zur Lösung der exemplarischen Aufgabe

Gegeben sind c, alpha und gamma, gesucht sind a,b und beta.

...

...

Den Winkel beta berechnet man aus der Formel alpha+beta+gamma=180°.

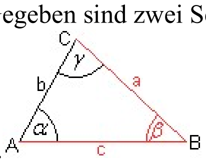
Die Seite a berechnet man nach dem Sinussatz a:sin(alpha)=c:sin(gamma).

Die Seite b berechnet man nach dem Sinussatz b:sin(beta)=c:sin(gamma).

---

3. Grundaufgabe SWS

Gegeben sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.

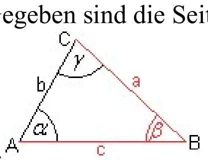
...

3 Fälle

c-beta-a, a-gamma-b, b-alpha-c

Zur Lösung der exemplarischen Aufgabe

Gegeben sind die Seiten a ,c und beta, gesucht sind b, alpha und gamma.

...

Die Seite b berechnet man nach dem Kosinussatz b²=a²+c²-2ac*cos(beta).

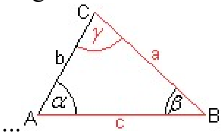
Den Winkel gamma berechnet man nach dem Sinussatz sin(gamma):sin(beta)=c:b.

Den Winkel alpha berechnet man nach alpha+beta+gamma=180°.

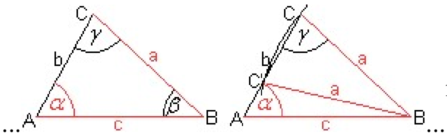
---

4. Grundaufgabe S_gSW

Gegeben sind ein Winkel, eine anliegende und eine zu ihr größere, dem Winkel gegenüberliegende Seite.



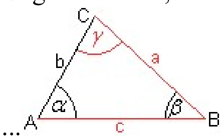
6 Fälle
c-a-gamma, a-b-alpha, b-c-beta,
c-a-alpha, b-a-beta, c-b-gamma



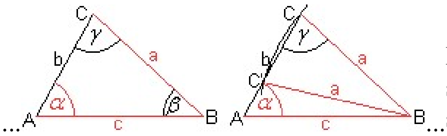
Sind die Stücke a, c und alpha gegeben und gilt a<c, so gibt es offenbar zwei Dreiecke mit diesen Stücken, nämlich die Dreiecke ABC und ABC'.

Ein Kreis um Punkt B mit dem Radius a führt zu zwei Schnittpunkten C und C'.
Deshalb ist die Zusatzbedingung a>c notwendig, um Eindeutigkeit zu erreichen.

Zur Lösung der exemplarischen Aufgabe
Gegeben sind a,c und gamma, gesucht sind b, alpha und beta.



Den Winkel alpha berechnet man nach dem Sinussatz sin(alpha):sin(gamma)=a:c.
Den Winkel beta berechnet man nach alpha+beta+gamma=180°.
Die Seite b berechnet man nach dem Sinussatz b:c=sin(beta):sin(gamma).

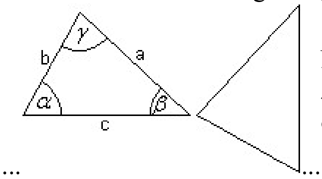


Sind a, c und alpha gegeben, so gilt sin(gamma)**:**sin(alpha)=a**:**c.
Dann ist sin(gamma)=(a**:**c)**:**sin(alpha). Ist a<c, so ist a**:**c>1 und auch (a**:**c)**:**sin(alpha)<1
sin(gamma)<1 bedeutet, dass es zwei Winkel gamma gibt, eine spitzen und einen stumpfen. Das zeigt auch die Zeichnung.

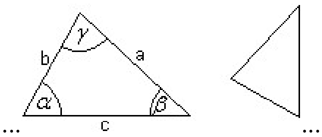
Der Fall WWW
Der Fall, dass nur die drei Winkel gegeben sind, ist zu streichen. Drei Winkel legen kein Dreieck eindeutig fest.
Dreiecke, die in entsprechenden Winkeln übereinstimmen, sind nur ähnlich.

Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze top

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in Form und Größe übereinstimmen, also in allen sechs Stücken.



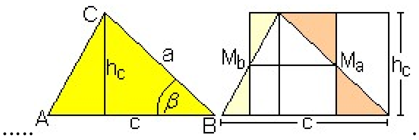
Nach den Überlegungen zu den Grundaufgaben kann man vier Kongruenzsätze formulieren.
Zwei Dreiecke sind schon kongruent, wenn sie in drei Stücken übereinstimmen, und zwar wie in den Grundaufgaben SSS, WSW, SWS, S_gSW beschrieben.



Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in der Form übereinstimmen.
Die Form aber stimmt überein, wenn entsprechende Winkel gleich sind.
Es gibt drei weitere Ähnlichkeitssätze in Anlehnung an die Grundaufgaben SSS, SWS, S_gSW.

Flächeninhalt eines Dreiecks top

Grundformel

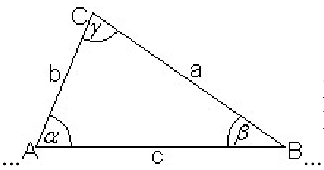


Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist $\mathbf{A=(1/2)ch_c=(1/2)ac*sin(beta)}$.

Beweis
Man zeichnet die Mittellinie M_aM_c ein, die halb so groß wie die gegenüberliegende Seite c ist, und ein Rechteck mit den Seiten c/2 und h_c. Wegen der Kongruenz der farbigen Paare von Dreiecken ist die Dreiecksfläche gleich der Rechteckfläche $(1/2)ch_c$, wzbw.

In Analogie gilt $\mathbf{A=(1/2)ah_a=(1/2)ab*sin(gamma)}$ und $\mathbf{A=(1/2)bh_b=(1/2)bc*sin(alpha)}$.

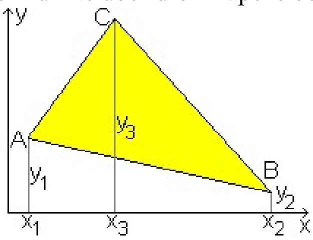
Heronsche Formel



Sind die Seiten a,b und c des Dreiecks gegeben, so errechnet sich der Flächeninhalt nach der heronschen Formel **A=sqrt[s(s-a)(s-b)(s-c)]** mit s=(1/2)(a+b+c).
Einen Beweis findet man bei Arndt Brünner (URL unten)

Flächeninhalt über Koordinaten

Ist ein Dreieck ABC in einem kartesischen Koordinatensystem gegeben, so lässt sich der Flächeninhalt mit Hilfe der Koordinaten der Punkte über drei Trapeze berechnen.

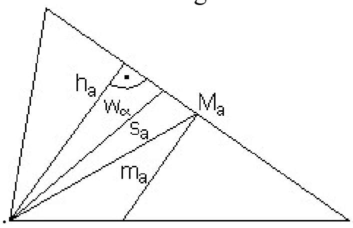


Es seien $A(x_1|y_1)$, $B(x_2|y_2)$ und $C(x_3|y_3)$ die Eckpunkte des Dreiecks.
Dann gilt nach der Zeichnung $A=(1/2)(y_1+y_3)(x_3-x_1)+(1/2)(y_2+y_3)(x_2-x_3)-(1/2)(y_1+y_2)(x_2-x_1)$.
Man erhält $\mathbf{A=(1/2)[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]}$.

Besondere Linien im Dreieck top

Übersicht

Nach der Tradition gibt es vier besondere Linien im Dreieck.



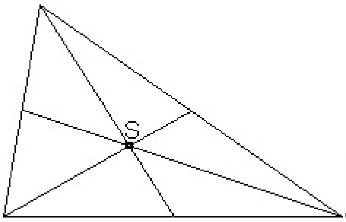
>Die *Höhe* h geht durch einen Eckpunkt und steht senkrecht auf der Gegenseite.

>Die *Winkelhalbierende* w halbiert einen Innenwinkel.

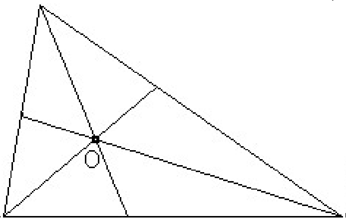
>Die *Seitenhalbierende* s geht durch einen Eckpunkt und halbiert die Gegenseite.

>Die *Mittelsenkrechte* m geht durch die Mitte einer Seite und steht senkrecht auf ihr.

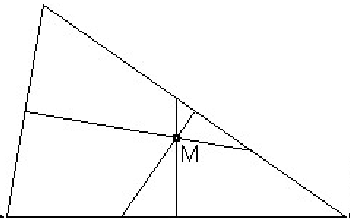
Jede Transversale einer Art kommt 3x vor. Zeichnet man sie ein, so schneiden sie sich in einem Punkt.



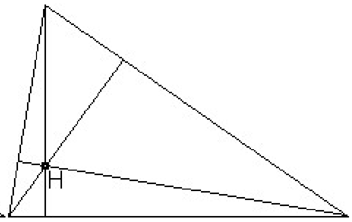
Seitenhalbierenden



Winkelhalbierenden

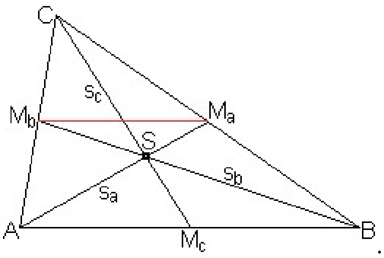


Mittelsenkrechte



Höhen

Seitenhalbierende im Dreieck



Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist der Schwerpunkt des Dreiecks.
Die Figur wird um eine Mittelparallele ergänzt. Man erhält sie, indem man zwei Seitenmitten miteinander verbindet.
Die Mittelparallele M_aM_b ist halb so groß wie die nicht anliegende Seite AB.

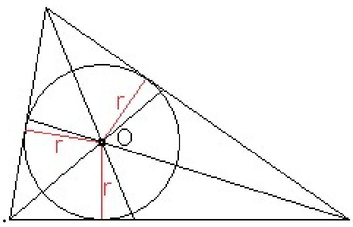
Es gilt nun: Die Seitenhalbierenden oder Schwerlinien teilen sich im Verhältnis 2:1.
Beweis
Nach dem zweiten Strahlensatz ist $SA:SM_a=AB:M_aM_b=AB:(AB/2)=2:1$, wzbw.
Entsprechend verfährt man mit den beiden anderen Seitenhalbierenden.

Die Längen der Seitenhalbierenden errechnen sich nach den folgenden Formeln.

$\mathbf{s_a^2=b^2/2+c^2/2-a^2/4}$ $\mathbf{s_b^2=a^2/2+c^2/2-b^2/4}$ $\mathbf{s_c^2=a^2/2+b^2/2-c^2/4}$

Die Formeln sind eine Anwendung des Satzes von Stewart. Er wird auf der Seite von Peter Andree (URL unten) bewiesen und zur Herleitung dieser Formeln verwendet.

Winkelhalbierende im Dreieck

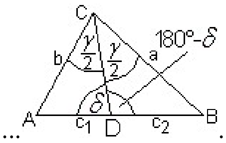


Es gilt: Die Winkelhalbierende schneiden sich im Mittelpunkt des Inkreises.

Die Winkelhalbierende ist der geometrische Ort aller Punkte, die von den Schenkeln eines Innenwinkels den gleichen Abstand haben.

Der Schnittpunkt O hat dann von allen Schenkeln den gleichen Abstand.

Jede Winkelhalbierende (eines Innenwinkels) im Dreieck teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.
Das heißt in der Formelsprache $\mathbf{a:b=c_2:c_1}$.

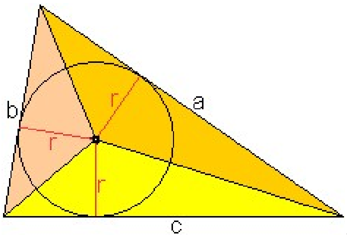


Beweis: Nach dem Sinussatz ist sin(180°-delta):sin(gamma/2)=a:c_2 und in(delta):sin(gamma/2)=b:c_1.
Wegen sin(180°-delta)=sin(delta) ist a:c_2=b:c_1 oder a:b=c:c_1, wzbw.

... ...

Entsprechende Formeln gelten für die beiden übrigen Winkelhalbierenden.

Für den Radius des Inkreises gilt **r=(2A)/(a+b+c)** oder **r=2*sqrt[s(s-a)(s-b)(s-c)]/s**.
Beweis



Man kann den Flächeninhalt eines Dreiecks auch mit Hilfe des Radius bestimmen. Es gilt A=(1/2)ar+(1/2)br+(1/2)cr. Daraus ergibt sich für den Radius r=(2A)/(a+b+c).
Berücksichtigt man die heronsche Flächenformel A=sqrt[s(s-a)(s-b)(s-c)] mit s=(1/2)(a+b+c) von oben, so ist r=2*sqrt[s(s-a)(s-b)(s-c)]/s, wzbw.

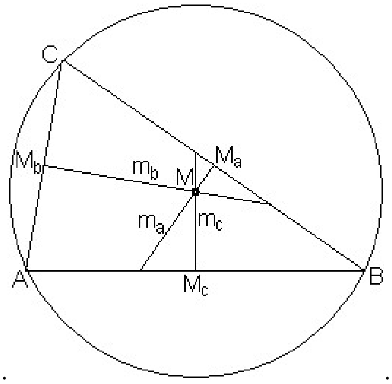
... ...

Die Längen der Winkelhalbierenden errechnen sich nach den folgenden Formeln.

w_{alpha}^2=bc{[1-[a/(b+c)]²} **w_{beta}^2=ac{[1-[a/(a+c)]²}** **w_{gamma}^2=ab{[1-[a/(a+b)]²}**

Die Formeln sind eine Anwendung des Satzes von Stewart. Er wird auf der Seite von Peter Andree (URL unten) bewiesen und zur Herleitung dieser Formeln verwendet.

Mittelsenkrechte im Dreieck

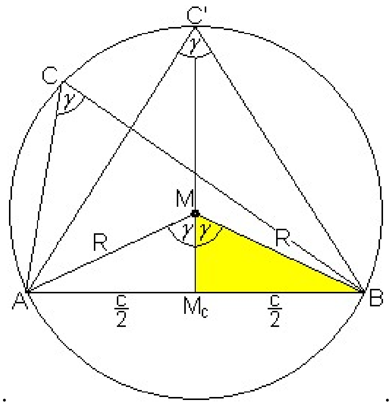


Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Dreiecks ist der Mittelpunkt des Umkreises.

Es gelten die Formeln **R=(1/2)a/sin(alpha)=(1/2)b/sin(beta)=(1/2)c/sin(gamma).**

... ...

Beweis

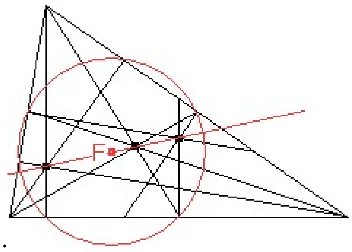


Man verlängert M_cM über M hinaus und erhält Punkt C' und verbindet C' mit A und B.
Das gleichschenklige Dreieck ABC' ist entstanden.
Der Winkel an der Spitze ist gamma, da die Winkel ACB und AC'B über der gleichen Sehne liegen und als Umfangswinkel gleich sind.
Man verbindet M mit A und B.
Das gleichschenklige Dreieck ABM mit den Schenkeln R ist entstanden.
Der Winkel an der Spitze ist als Mittelpunktwinkel über AB gleich 2*gamma.
Im gelben Dreieck kann man sin(gamma)=(c/2)/R ablesen.
Das führt zu R=(1/2)c/sin(gamma).

... ...

Entsprechend beweist man R=(1/2)a/sin(alpha)=(1/2)b/sin(beta).

Höhen im Dreieck



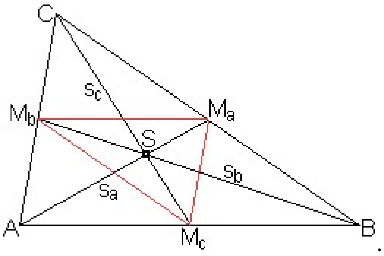
Bei meinen Recherchen habe ich festgestellt, dass es zum Thema *Höhen im Dreieck* viel Material gibt. Deshalb habe ich das Kapitel Höhen im Dreieck ausgegliedert.
Da findet man auch die Aussage, dass der Höhenschnittpunkt H, der Umkreismittelpunkt M und den Schwerpunkt S auf einer Geraden liegen. - Es gilt HS=2*SM.

...

....

Es gibt im Internet eine Online-Liste mit mehr als 3500 (!) ausgezeichneten Dreieckspunkten. Das ist die Encyclopedia of Triangle Centers (ETC), betreut von Clark Kimberling, Professor für Mathematik an der University of Evansville (URL unten).
Die vier besprochenen Punkte bilden die ersten vier: O=X(1), S=X(2), M=X(3) und H=X(4).

Mittendreieck



... ...

Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten, so entsteht im Inneren ein halb so großes, ähnliches Dreieck, das Mittendreieck.
Entsprechende Seiten liegen parallel.

Weiter entstehen drei zum Mittendreieck kongruente Dreiecke in den Ecken des Ausgangsdreiecks.

Konstruktion eines Dreiecks top

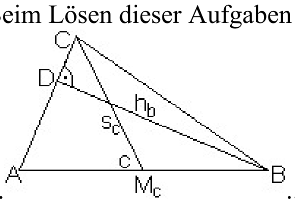
Oben wird darauf eingegangen, wie man die Grundaufgaben rechnerisch löst. Früher nahmen die zeichnerischen Lösungen im Anfangsunterricht Geometrie viel Raum ein. Die Regel war, für Dreieckskonstruktionen nur Zirkel und Lineal zu verwenden. Sind nur die Seiten oder Innenwinkel gegeben, so sind die Konstruktionen einfach. Man geht von einer Seite aus und findet den dritten Punkt über das Antragen von Winkeln und das Zeichnen von Kreisen mit einer Seitenlänge als Radius. Anspruchsvoller und oft nicht ohne Reiz sind Konstruktionen, wenn man weitere Größen zulässt.
Das sind vier typische Aufgaben aus einem alten Lehrbuch von 1952.

Gegeben:

$h_c = 4{,}8$ cm	$r = 3{,}6$ cm	$\beta = 80°$
$a = 6{,}7$ cm	$h_c = 5{,}5$ cm	$\gamma = 78°$
$a = 8{,}9$ cm	$h_a = 6{,}2$ cm	$\beta = 35°$
$c = 7{,}6$ cm	$h_b = 5{,}3$ cm	$s_c = 6{,}8$ cm

Neben den Stücken sind hier auch der Radius des Umkreises, die Höhe und die Seitenhalbierende gegeben.

Beim Lösen dieser Aufgaben ist eine Planfigur hilfreich. Das soll an der letzten Aufgabe gezeigt werden.



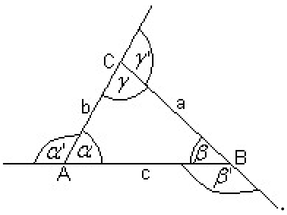
... ...

Gegeben sind also die Seite c, die Höhe h_b und die Seitenhalbierende s_c.
Das ist der Lösungsweg.
Man zeichnet zuerst das rechtwinklige Dreieck ABD, sucht den Mittelpunkt M_c der Seite c und erhält den Punkt C über einen Kreis mit dem Radius s_c um M_c.

Aufgaben dieser Art können sehr anspruchsvoll sein.
A. Bogomolny von Cut-The-Knot hat eine Sammlung von Dreieckskonstruktionen angelegt. Den Link auf die Seite *The many ways to construct a triangle* findet man unten.

Außerhalb des Dreiecks top

Außenwinkel



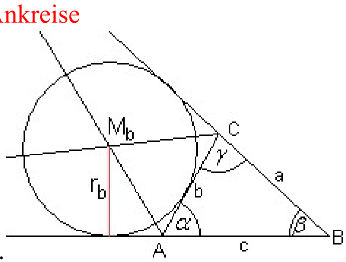
... ...

Verlängert man wie in der Zeichnung die Seiten, so entstehen als Nebenwinkel der Innenwinkel drei neue Winkel, die sog. Außenwinkel.

Man kann leicht nachweisen:
>Jeder Außenwinkel ist die Summe der nicht anliegenden Innenwinkel.
>Die Summe der Außenwinkel ist 360°.

Es gibt sechs Außenwinkel, da zu jedem Innenwinkel zwei Außenwinkel gehören.

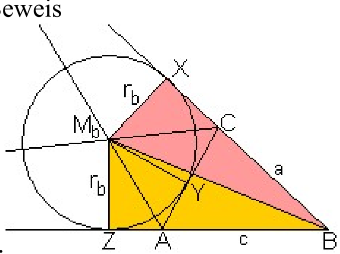
Ankreise



... ...

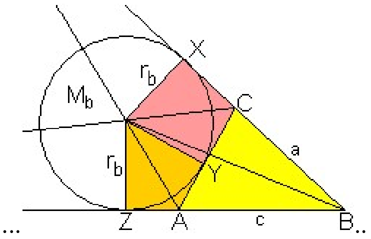
Halbiert man zwei an einer Seite anliegende Außenwinkel, so schneiden sich die freien Schenkel in einem Punkt, der der Mittelpunkt eines "Ankreises" ist.
Der Radius des Ankreises, der die Seite b berührt, ist **r_b=2A/(a+c-b)**.
Es gibt zwei weitere Ankreise mit den Radien **r_a=2A/(b+c-a)** und **r_c=2A/(a+b-c)**.

Beweis



...

Der Flächeninhalt A=A(ABC) des Dreiecks ABC ergibt sich als
A(ABC)=A(ZBM$_b$)+A(M$_b$BX)-A(M$_b$YCX)-A(ZAYM$_b$).

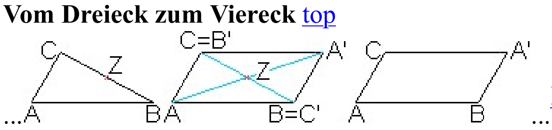


Da die Tangentenabschnitte ZA und AY bzw. YC und CX gleich sind, ist
$A(M_bYCX)-A(ZAYM_b)=2*A(ACM_b)$.
Dann ist $A(ABC)=A(ZBM_b)+A(M_bBX)-2*A(ACM_b)$
$=(1/2)r_b(c+AY)+(1/2)r_b(a+CY)-2*(1/2)br_b$
$=(1/2)r_bc+(1/2)r_ba+(1/2)r_bc(AY+CY)-2br_b=(1/2)r_b[c+a+b-2b]$.
Aus $A(ABC)=(1/2)r_b[a+c-b]$ folgt $r_b=2A/(a+c-b)$, wzbw.

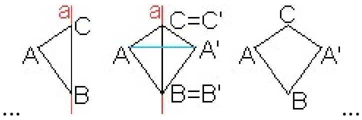
Beziehung zwischen dem Radius des Inkreises und den Radien der Ankreise
Es gilt $\mathbf{1/r = 1/r_a+1/r_b+1/r_c}$.

(Algebraischer) Beweis:
$1/r_a+1/r_b+1/r_c=(b+c-a)/2A+(a+c-b)/2A+(a+b-c)/2A=(a+b+c)/2A=1/r$.

Vom Dreieck zum Viereck top



Spiegelt man ein Dreieck an einem Mittelpunkt einer Seite, entsteht ein Parallelogramm.



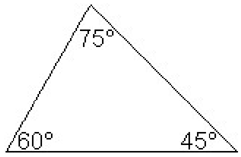
Spiegelt man ein Dreieck an einer Seite, entsteht ein Drachenviereck.

Allgemeines Dreieck im Internet top

Deutsch

Arndt Brünner
Berechnung von Dreiecken, Herons Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks

Eckard Specht
Klassische Transversalen



Werner Brefeld
Allgemeines Dreieck (möglichst schiefes Dreieck) für die Schule

Wikipedia
Dreieck, Ausgezeichnete Punkte im Dreieck, Feuerbachkreis, Eulergerade, Höhenfußpunktdreieck,
Kreise am Dreieck, Johnson-Kreis, Dreiecksungleichung, Satz von Stewart,
Kimberling-Nummer, Ankreis, Kongruenzsätze, Ähnlichkeitssätze, Mollweidesche Formeln, Halbwinkelsatz

---

Englisch

Clark Kimberling
Encyclopedia of Triangle Centers (ETC)

A. Bogomolny (Cut-The-Knot)
The many ways to construct a triangle, Metric Relations in a Triangle, Triangle Classification

Eric W. Weisstein (MathWorld)
Triangle, Medial Triangle, Herons Formula, Triangle Triangle Picking

Wikipedia
Triangle, Triangle center, Nine-point circle, Euler line, Altitude (triangle),
Incircle and excircles of a triangle, Johnson circles, Triangle inequality, Stewart's theorem, Encyclopedia of Triangle Centers,
Incircle and excircles of a triangle,
Congruence (geometry), Similarity (geometry), Mollweide's formula

---

Referenzen top

(1) Heinz Nickel (Hrsg.): Algebra und Geometrie für Ingenieur- und Fachschulen,
Verlag Harry Deutsch, Frankfurt/M und Zürich, 1966
(2) Jan Gullberg: Mathematics- From the Birth of Numbers, New York, London 1997 (ISBN0-393-04002-X)

Feedback: Emailadresse auf meiner Hauptseite

URL meiner Homepage:
http://www.mathematische-basteleien.de/

top