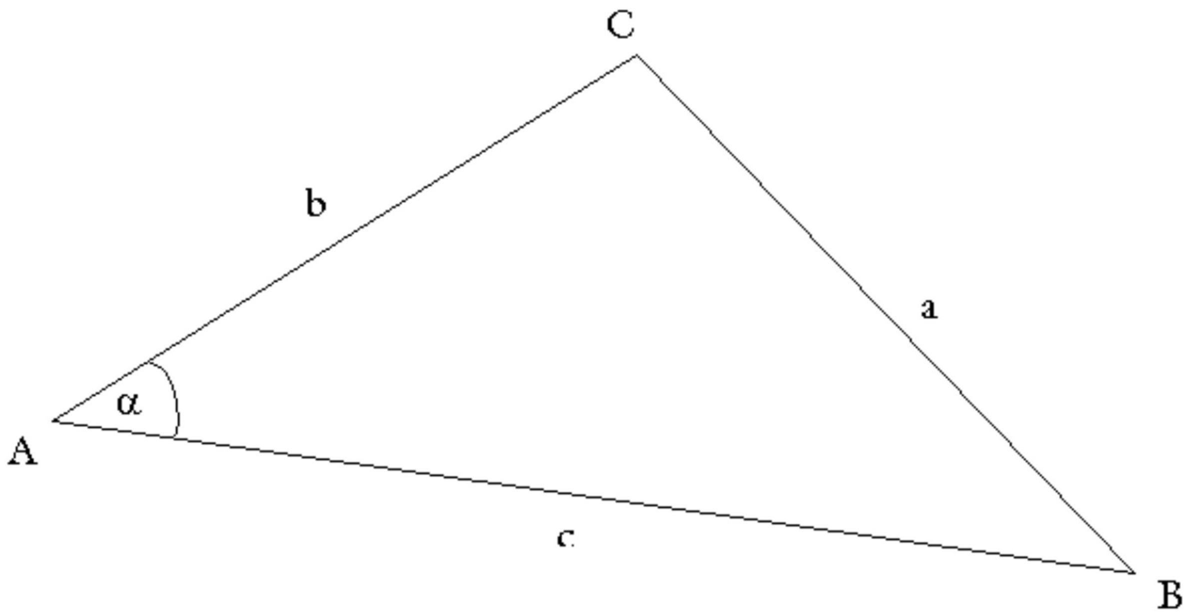
Der Kosinussatz

Der *Kosinussatz* wird auch als *trigonometrischer Pythagoras* bezeichnet. Das rührt daher, daß mit ihm wie beim Satz des Pythagoras eine fehlende Dreieckseite berechnet werden kann, allerdings im Gegensatz zum Pythagoras, der ja nur für rechtwinklige Dreiecke gilt, in **jedem beliebigen** Dreieck.

Man kann ja ein Dreieck eindeutig konstruieren, wenn man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gegeben hat (Kongruenzsatz). Also zum Beispiel die Seiten b und c und den Winkel α in diesem Dreieck:



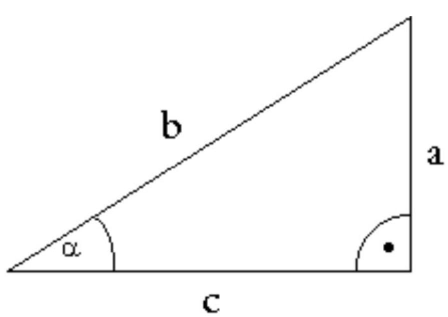
Die Seite a ist durch b, c und α eindeutig bestimmt!

Der Kosinussatz dient nun dazu, die Länge der Seite a rechnerisch zu bestimmen. Das kommt in der "Wirklichkeit" sehr häufig vor, z.B. bei Höhen- und Entfernungsbestimmungen.

Vorüberlegungen

Bevor ich zeige, wie man das mit den trigonometrischen Funktionen *Sinus* und *Kosinus* bewerkstelligen kann, sind einige Vorüberlegungen nötig.

Die Winkelfunktionen *Sinus* und *Kosinus* gelten ja bekanntlicherweise nur im rechtwinkligen Dreieck:



Die beiden Funktionen sind dabei so definiert:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{c}{b}$$

Bei den trigonometrischen Funktionen gelten verschiedene interessante Rechengesetze. Das wichtigste und vielleicht schönste davon ist folgende Regel:

$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$

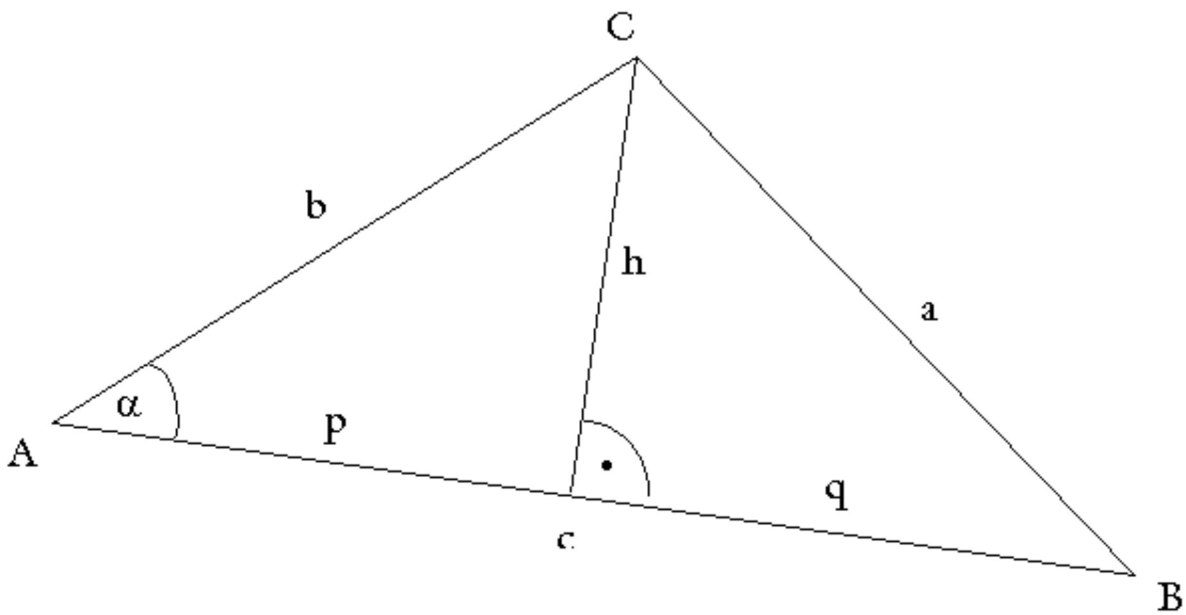
Um das zu beweisen, muß man für *sin* und *cos* jeweils die Definitionen mit den Dreiecksseiten einsetzen und den Term auflösen. Dabei muß beachtet werden, daß das zugrundeliegende Dreieck rechtwinklig ist mit b als Hypotenuse.
Daher gilt: $b^2 = a^2 + c^2$

Somit ergibt sich folgende Vereinfachung des Termes:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1$$

Der Kosinussatz

Damit man die trigonometrischen Funktionen in einem **nicht**rechtwinkligen Dreieck anwenden kann, benutzt man eine Hilfskonstruktion: Man konstruiert die Höhe vom Punkt C auf die Seite c:



Dadurch wird die Seite c in die zwei Abschnitte p und q zerteilt, und es entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, die die Seite h gemeinsam haben. (Das folgende gilt aufgrund dieser Konstruktion vorerst auch nur für diesen Fall, daß nämlich die Höhe **innerhalb** des Dreiecks liegt.)

Zur Erinnerung: Das Ziel ist, eine Formel zu finden, mit der a berechnet werden kann, wenn b, c und α gegeben sind.

α und b liegen im linken Dreieck, a liegt im rechten, c ist die Summe jeweils einer Kathete beider Dreiecke.

Die Idee ist nun, die beiden Dreiecke durch ihre gemeinsame Größe h rechnerisch zu "verbinden", um mit den gegebenen Größen zur Größe a zu gelangen.

Im rechten Dreieck gilt (Pythagoras): $h^2 = a^2 - q^2$

Im linken Dreieck bringt man den gegebenen Winkel α ins Spiel und berechnet: $h = b \cdot \sin(\alpha)$

Da uns h letztlich nicht interessiert, kann die zweite Gleichung dazu verwendet werden, h^2 in der ersten Gleichung zu ersetzen. Nach der zweiten Gleichung gilt nämlich: $h^2 = (b \cdot \sin(\alpha))^2 = b^2 \cdot (\sin(\alpha))^2$

So kann man die beiden Gleichungen gleichsetzen, wobei h^2 letztlich verschwinden kann:

$$b^2 \cdot (\sin(\alpha))^2 = h^2 = a^2 - q^2$$

$$b^2 \cdot (\sin(\alpha))^2 = a^2 - q^2$$

In dieser Gleichung sind α und b bekannt, a soll berechnet werden, nur das q stört noch! Um das q rauszuschmeißen, überlegt man sich, daß $p + q = c$ gilt. Also ist $q = c - p$

Außerdem gilt: $p = b \cdot \cos(\alpha)$.

Somit gilt: $q = c - b \cdot \cos(\alpha)$.

Hier ist q nur mit bekannten Größen umschrieben worden! Uff! soweit gut, aber jetzt kommt noch der

Endspurt!

Nun muß nur noch dieser Term $(c - b \cdot \cos(\alpha))$ für q in die Gleichung $b^2 \cdot (\sin(\alpha))^2 = a^2 - q^2$ eingesetzt werden, und schon haben wir eine Gleichung, in der nur noch a unbekannt ist!

$$b^2 \cdot (\sin(\alpha))^2 = a^2 - (c - b \cdot \cos(\alpha))^2$$

Zuerst wird die Klammer mit dem Quadrat rechts aufgelöst (2. binomische Formel):

$$b^2 \cdot (\sin(\alpha))^2 = a^2 - (c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) + b^2 \cdot (\cos(\alpha))^2)$$

Dann wird die Minusklammer aufgelöst:

$$b^2 \cdot (\sin(\alpha))^2 = a^2 - c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) - b^2 \cdot (\cos(\alpha))^2$$

Nun wird die Gleichung nach a^2 umgeformt:

$$a^2 = c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) + b^2 \cdot (\cos(\alpha))^2 + b^2 \cdot (\sin(\alpha))^2$$

Das b^2 wird ausgeklammert:

$$a^2 = c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) + b^2 \cdot [(\cos(\alpha))^2 + \sin(\alpha))^2]$$

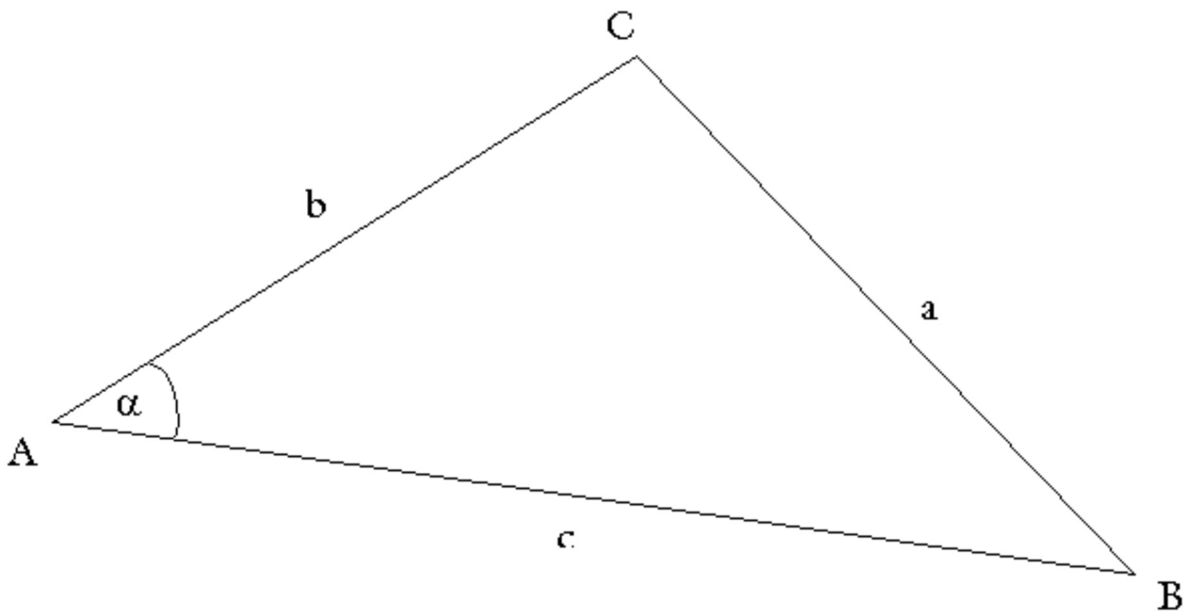
Nach obiger Regel gilt: $(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$
und somit ist:

$$a^2 = c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) + b^2$$

Man zieht das b^2 nach vorne und erhält damit den

Kosinussatz

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(\alpha)$

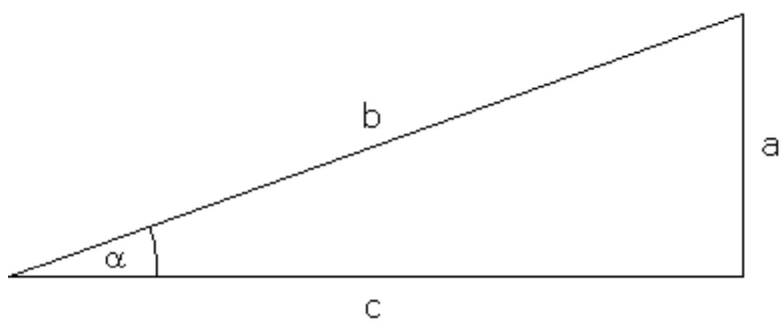


Die Sache wird übrigens etwas überschaubarer, wenn man die Gleichung $b^2 \cdot (\sin(\alpha))^2 = a^2 - q^2$ **gleich** nach a^2 auflöst und dann erst q^2 ersetzt. Dann fällt das fehlerträchtige Auflösen der Minusklammer weg.

Bislang ist der Satz bewiesen für die Dreiecke, bei denen $\beta<90°$ ist. Zu beweisen bleibt daher $\beta=90°$ und $\beta>90°$.

1. Der Fall $\beta=90°$ (siehe Abbildung rechts) ist schnell bewiesen: Im hier vorliegenden rechtwinkligen Dreieck ist b die Hypotenuse, c die Ankathete und a die Gegenkathete zu α, es gilt also:

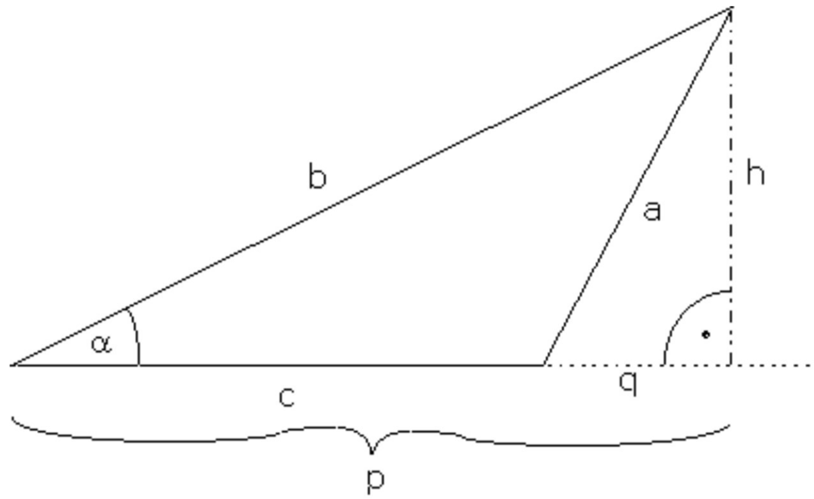
   $$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{c}{b}$$

   In diesem Fall kann man im Kosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ anstelle von $\cos\alpha$ folglich c/b schreiben, womit sich ergibt: $a^2 = b^2 + c^2 - 2c^2$, bzw. vereinfacht $a^2 = b^2 - c^2$; und das ist der Satz von Pythagoras $a^2 + c^2 = b^2$ für dieses Dreieck.

2. Wenn a und c einen stumpfen Winkel bilden, d.h. wenn $\beta>90°$ ist und die Höhe h auf c außerhalb des Dreiecks liegt (siehe Abbildung rechts), ergibt sich für h^2 aus der jeweiligen Anwendung des Satzes von Pythagoras auf die beiden enthaltenen rechtwinkligen Dreiecke:

$h^2 = a^2 - q^2 = a^2 - (p - c)^2$
$h^2 = b^2 - p^2$



Gleichsetzen ergibt

$a^2 - (p - c)^2 = b^2 - p^2$
$a^2 - (p^2 - 2cp + c^2) = b^2 - p^2$
$a^2 - p^2 + 2cp - c^2 = b^2 - p^2$
$a^2 + 2cp - c^2 = b^2$

Wegen $\cos(\alpha) = p/b$ ist $p = b\cdot\cos(\alpha)$ und man kann in der letzten Gleichung ersetzen:

$a^2 + 2c\cdot b\cdot\cos(\alpha) - c^2 = b^2$

Hieraus folgt sofort:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos(\alpha)$